§4. Sistemas de Partículas

4.1 Conservação do Momentum Linear

Consideramos partículas puntiformes, caraterizadas pelas suas coordenadas $\{\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N\}$ e suas massas $\{m_1, m_2, \dots, m_N\}$.

Estes sistemas mecânicos estarão sujeitos a 'forças internas' (devidas à presença das outras partículas) e 'forças externas' de agentes fora do sistema (campos gravitacionais, campos eletromagnéticos, etc.).

Seja uma partícula genérica de massa m_k e coordenada $\vec{r}_k$, com $k = 1, 2, \dots, N$. As eqs. de Newton fornecem:

$$m_k \ddot{\vec{r}}_k = \dot{\vec{p}}_k = \vec{F}_k^{(i)} + \vec{F}_k^{(e)}$$

$\vec{F}_k^{(i)}$: força interna sobre a partícula de massa m_k

$\vec{F}_k^{(e)}$: força externa sobre a k-partícula

A força interna é devida às outras partículas:

$$\vec{F}_k^{(i)} = \sum_{j \neq k} \vec{F}_{j \to k} ,$$

onde $\vec{F}_{j \to k}$ é a força que exerce a partícula 'j' sobre a partícula 'k'.

Seja $\vec{F}^{(i)}$ a força interna total. Temos:

$$\vec{F}^{(i)} = \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k^{(i)} = \sum_{\substack{j,k \\ j \neq k}} \vec{F}_{j\to k} = \sum_{\substack{k,j \\ k\neq j}} \vec{F}_{k\to j}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{\substack{k,j \\ k\neq j}} \left(\vec{F}_{j\to k} + \vec{F}_{k\to j} \right).$$

Admitindo a 3ª Lei de Newton na forma 'fraca':

$$\vec{F}_{k\to j} = - \vec{F}_{j\to k} \quad \text{(ação e reação)},$$

temos que as forças internas se cancelam aos pares:

Resultado:

$$\vec{F}^{(i)} = \sum_k \vec{F}_k^{(i)} = 0 .$$

Def. Momentum total, $\vec{P}$

$$\vec{P} \equiv \sum_k \vec{p}_k = \sum_k m_k \vec{v}_k$$

Procuramos a eq. de movimento para $\vec{P}$:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum_k \dot{\vec{p}}_k = \sum_k \left(\vec{F}_k^{(i)} + \vec{F}_k^{(e)} \right)$$

$$= \sum_k \vec{F}_k^{(e)}$$

Def. Força externa total, $\vec{F}$:

$$\vec{F} \equiv \sum_k \vec{F}_k^{(e)} .$$

A eq. para $\vec{P}$ fica na forma:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F} .$$

Se a força externa for nula, $\vec{F} = 0$, o momentum total é conservado:

$$\vec{P} = \text{cte} .$$

Teorema. Para um sistema de partículas, sujeito apenas às forças internas, o momentum total é constante:

$$\vec{P} = \sum_k m_k \vec{v}_k = \text{cte.}$$

tilibra

A conservação do momentum é mais geral que a 3ª Lei de Newton, mesmo na sua forma fraca. Pode-se mostrar que a conservação do momentum linear deriva de uma propriedade de simetria do espaço: para sistemas inerciais, o espaço é homogêneo. Significa que uma translação infinitesimal de um sistema como um todo, não alterará as relações internas entre as partículas. Esta propriedade de invariância pode ser implementada através do 'Princípio do Trabalhos Virtuais'. Este princípio permite também levar em conta os vínculos (possíveis) entre as partículas. Discutiremos este princípio de maneira mais aprofundada no fim do presente capítulo.

A lei de conservação do momentum linear, permite definir o chamado Centro de Massa.

Def. Centro de Massa (CM)

CM é um ponto cuja posição $\vec{R}$ é definida por

$$M\vec{R} = \sum_k m_k \vec{r}_k ,$$

onde $M = \sum_k m_k$ é a massa total do sistema.

Em componentes, $\vec{R} = (X, Y, Z)$ temos

$$X = \frac{1}{M}\sum_k m_k x_k \,, \quad Y = \frac{1}{M}\sum_k m_k y_k \,, \quad Z = \frac{1}{M}\sum_k m_k z_k \,.$$

A eq. de movimento para $\vec{R}$ é:

$$M\dot{\vec{R}} = \sum_k m_k \dot{\vec{r}}_k = \sum_k \vec{p}_k = \vec{P} \,, \text{ e}$$

$$M\ddot{\vec{R}} = \dot{\vec{P}} = \vec{F} = \sum_k \vec{F}_k^{(e)} \,.$$

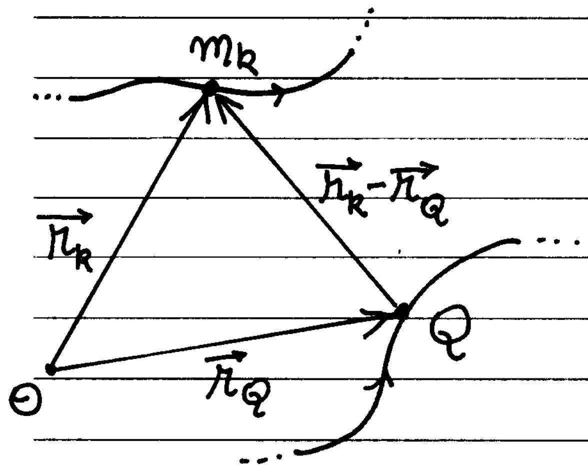
O movimento do CM só é afetado pelas forças externas.

O CM comporta-se como uma partícula fictícia, com a massa M total do sistema, sob a ação da força externa total $\vec{F}$. Se for $\vec{F} = 0$, o momentum linear total é conservado e o CM tem movimento retilíneo uniforme (MRU). Porém este conceito de partícula fictícia só pode ser realizado para particulares formas da força externa, para os quais o movimento do CM pode ser desacoplado das coordenadas internas. No caso geral, temos:

$$M\ddot{\vec{R}} = \vec{F}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_N)$$

e todas as coordenadas estarão acopladas.

4.2 Conservação do Momentum Angular



Generalizamos o conceito de Momentum Angular para uma definição em relação a um ponto arbitrário Q, não necessariamente fixo no espaço:

Def.
$$\vec{L}_k^{(Q)} \equiv (\vec{r}_k - \vec{r}_Q) m_k \times (\dot{\vec{r}}_k - \dot{\vec{r}}_Q),$$

onde $(\vec{r}_k - \vec{r}_Q)$ é a posição da k-partícula relativa ao ponto Q;

$(\dot{\vec{r}}_k - \dot{\vec{r}}_Q)$ é a sua velocidade relativa à velocidade do ponto Q.

Procuramos a eq. de movimento:

$$\frac{d}{dt}\vec{L}_k^{(Q)} = (\vec{r}_k - \vec{r}_Q) \times (\dot{\vec{p}}_k - m_k \ddot{\vec{r}}_Q)$$

$$= (\vec{r}_k - \vec{r}_Q) \times (\vec{F}_k^{(i)} + \vec{F}_k^{(e)}) - m_k (\vec{r}_k - \vec{r}_Q) \times \ddot{\vec{r}}_Q.$$

Agora passamos para o momentum angular total:

Def 1. Momentum Angular total (relativo a Q):

$$\vec{L}^{(Q)} \equiv \sum_k \vec{L}_k^{(Q)} .$$

Def 2. Torque total (relativo a Q):

$$\vec{N}^{(Q)} \equiv \sum_k (\vec{r}_k - \vec{r}_Q) \times \vec{F}_k^{(e)} .$$

Note que a def. de $\vec{N}^{(Q)}$ só envolve as forças externas.

Passando para o $\vec{L}^{(Q)}$ total:

$$\frac{d}{dt}\vec{L}^{(Q)} = \vec{N}^{(Q)} + \sum_k (\vec{r}_k - \vec{r}_Q) \times \vec{F}_k^{(i)} -$$

$$- M(\vec{R} - \vec{r}_Q) \times \ddot{\vec{r}}_Q$$

Restringimos a discussão a sistemas onde o último termo é nulo (de fato, a aplicação usual é tomar $\vec{r}_Q = \vec{R}$).

Calculamos agora a contribuição das forças internas para o torque:

$$\sum_k (\vec{r}_k - \vec{r}_Q) \times \vec{F}_k^{(i)} = \sum_k \vec{r}_k \times \vec{F}_k^{(i)} -$$

tilibra

$$- \vec{r}_Q \times \underbrace{\sum_k F_k^{(i)}}_{0} .$$

Mostramos que $\sum_k F_k^{(i)}$ é nulo. Só temos o termo:

$$\sum_k \vec{r}_k \times \vec{F}_k^{(i)} = \sum_{\substack{k,j \\ j \neq k}} \vec{r}_k \times \vec{F}_{j\to k}$$

$$= \sum_{\substack{j,k \\ k \neq j}} \vec{r}_j \times \vec{F}_{k \to j} ,$$

onde apenas foi feita uma troca de índices mudos, $j \rightleftarrows k$. Como as duas somas duplas são iguais, escrevemos:

$$\vec{N}^{(i)} \equiv \sum_k \vec{r}_k \times \vec{F}_k^{(i)} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{j,k \\ j \neq k}} \left(\vec{r}_k \times \vec{F}_{j \to k} + \vec{r}_j \times \vec{F}_{k \to j} \right)$$

usando a 3ª lei de Newton na forma 'fraca':

$$\vec{F}_{k \to j} = - \vec{F}_{j \to k}$$

e obtemos:

$$\vec{N}^{(i)} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{j,k \\ j \neq k}} (\vec{r}_k - \vec{r}_j) \times \vec{F}_{j \to k}$$

o vetor $(\vec{r}_k - \vec{r}_j)$ liga as partículas 'k' e 'j'

3ª Lei de Newton 'forte'

Ação e reação apontam segundo a linha que liga as partículas.

Definindo $\vec{r}_{kj} \equiv \vec{r}_k - \vec{r}_j$, temos

$$\vec{F}_{j\to k} = F_{jk}(\vec{r}_{kj}) \frac{\vec{r}_k - \vec{r}_j}{|\vec{r}_k - \vec{r}_j|}$$

$$= F_{jk}(\vec{r}_{kj})\, \hat{r}_{kj},$$

de maneira que $\vec{F}_{j\to k}$ é paralela (ou anti-paralela) ao vetor $\vec{r}_k - \vec{r}_j$.

Resultado: $\vec{N}^{(i)} = 0$,

as forças internas não contribuem para o torque.

A eq. de movimento fica:

$$\boxed{\frac{d\vec{L}^{(Q)}}{dt} = \vec{N}^{(Q)} = \sum_k (\vec{r}_k - \vec{r}_Q) \times \vec{F}_k^{(e)}}$$

Teorema. Conservação do Momentum Angular

Se o torque $\vec{N}^{(Q)}$ for nulo, o momentum angular $\vec{L}^{(Q)}$ é conservado.

Nossa demonstração precisou da forma "forte" da 3ª lei de Newton para obtermos o teorema de conservação. Da mesma maneira que para a conservação do momentum linear, esta lei de conservação de $\vec{L}$ é mais geral que a 3ª lei de Newton. Pode-se mostrar que ela é conseqüência da isotropia do espaço (num sistema inercial não tem direção priviligiada): o sistema de partículas é invariante por uma rotação infinitesimal de todo o sistema. Essa transformação deixa invariante todas as relações internas do sistema.

§ Conservação da energia.

Em muitos casos, a força total que age sobre as partículas de um sistema depende apenas das posições das partículas

$$\vec{F}_k = \vec{F}_k(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_N), \quad k = 1,2,\ldots,N .$$

Geralmente o que acontece é que a força externa sobre a partícula $\underline{k}$ depende da coordenada $\vec{r}_k$, em quanto que a força interna dependerá também das coordenadas das outras partículas. Suponhamos que existe uma função potencial tal que

$$V = V(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_N)$$

$$\boxed{F_k^x = -\frac{\partial V}{\partial x_k}, \quad F_k^y = -\frac{\partial V}{\partial y_k} \quad e \quad F_k^z = -\frac{\partial V}{\partial z_k},}$$

$$k = 1,2,3,\ldots,N.$$

As condições para a existência dessa função potencial são uma generalização das condições achadas para uma partícula. A existência de V implica que dV seja uma diferencial perfeita

$$dV = \sum_{\substack{i=x,y,z \\ k=1,2,\ldots,N}} \frac{\partial V}{\partial x_k^i} \, dx_k^i$$

O chamado teorema de Schwarz fornece

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x_k^i \partial x_l^j} = \frac{\partial^2 V}{\partial x_l^j \partial x_k^i} \qquad \begin{array}{l} i,j = x,y,z \\ k,l = 1,2,\ldots,N \end{array}$$

como condição necessária e suficiente para dV ser uma forma diferencial perfeita (com as segundas derivadas parciais $\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}$ contínuas).

Esta condição é a generalização do rotacional nulo. Em efeito temos:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^i_k \partial x^j_\ell} = \frac{\partial}{\partial x^i_k}\left(\frac{\partial V}{\partial x^j_\ell}\right) = -\frac{\partial F^j_\ell}{\partial x^i_k} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^j_\ell \partial x^i_k} = \frac{\partial}{\partial x^j_\ell}\left(\frac{\partial V}{\partial x^i_k}\right)$$

$$= -\frac{\partial}{\partial x^j_\ell} F^i_k$$

ou

$$\boxed{\frac{\partial F^i_k}{\partial x^j_\ell} - \frac{\partial F^j_\ell}{\partial x^i_k} = 0} \qquad \begin{array}{l} i,j = x,y,z, \\ k,\ell = 1,2,\ldots,N. \end{array}$$

Se estas condições são satisfeitas a integral

$$\int_1^2 dV = -\int_1^2 \vec{F}\cdot d\vec{r} = V(2) - V(1)$$

não depende da trajetória, apenas dos pontos inicial e final.

Na formula acima temos escrito

$$\vec{F} = (\vec{F_1}, \vec{F_2}, \ldots, \vec{F_N}) = (F_1^x, F_1^y, F_2^z, \ldots \quad , F_N^x, F_N^y, F_N^z)$$

e

$$d\vec{r} = (d\vec{r_1}, d\vec{r_2}, \ldots, d\vec{r_N}) = (dx_1 dy_1 dz_1, \ldots \quad , dx_N dy_N dz_N)$$

As equações do movimento para a k-ésima partícula ficam

$$m_k \frac{dv_k^x}{dt} = F_k^x \quad , \quad m_k \frac{dv_k^y}{dt} = F_k^y \quad , \quad m_k \frac{dv_k^z}{dt} = F_k^z$$

Assim como foi feito para uma partícula, podemos multiplicar pela velocidade e somar as tres equações. Notemos que

$$m v\left(\frac{dv}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right).$$

Daí:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m_k v_k^2\right) = F_k^x\left(\frac{dx_k}{dt}\right) + F_k^y\left(\frac{dy_k}{dt}\right) + F_k^z\left(\frac{dz_k}{dt}\right)$$

$$= -\left[\frac{\partial V}{\partial x_k}\dot{x}_k + \frac{\partial V}{\partial y_k}\dot{y}_k + \frac{\partial V}{\partial z_k}\dot{z}_k\right]$$

e somando sobre todas as partículas obtemos

$$\frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{1}{2}m_k v_k^2\right) = -\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{\partial V}{\partial x_k}\dot{x}_k + \frac{\partial V}{\partial y_k}\dot{y}_k + \frac{\partial V}{\partial z_k}\dot{z}_k\right).$$

Supondo que V não depende explicitamente do tempo, $\frac{\partial V}{\partial t} = 0$ e então

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{k=1}^{N}\left(\frac{\partial V}{\partial x_k}\dot{x}_k + \frac{\partial V}{\partial y_k}\dot{y}_k + \frac{\partial V}{\partial z_k}\dot{z}_k\right).$$

Escrevendo a energia cinética total como

$$T = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} m_k v_k^2$$

a equação acima fica

$$\frac{d}{dt}(T+V) = 0$$

ou

$$\boxed{T + V = cte \equiv E.}$$

E é chamado de energia mecânica do sistema.

Pode acontecer que as forças internas sejam derivadoeis de um potencial e não as forças externas. O teorema da energia neste caso fica:

$$\frac{d}{dt}\left(T + V^{int}\right) = \sum_{k=1}^{N} \left(\vec{F}_k^{e} \cdot \vec{v}_k\right),$$

onde V^i é o potencial associado às forças internas. Escrevemos as forças internas como somas de forças de pares de partículas

$$\vec{F}_k^{int} = \sum_{k \neq m} \vec{F}_{km}.$$

Vamos supor ainda que a força entre o par $(k\ell)$ depende apenas da posição relativa $(\vec{r}_k - \vec{r}_\ell)$. Definindo

$$\vec{r}_{k\ell} \equiv \vec{r}_k - \vec{r}_\ell$$

temos

$$\vec{F}_k^{int} = \sum_{\ell \neq k} \vec{F}_{k\ell}(\vec{r}_{k\ell})$$

Se a força $\vec{F}_{k\ell}(\vec{r}_{k\ell})$ é conservativa ela deriva de um potencial que chamaremos

$$V_{k\ell}(\vec{r}_{k\ell}) = -\int_{\vec{r}_s}^{\vec{r}_{k\ell}} d\vec{\rho} \cdot \vec{F}_{k\ell}(\vec{\rho}),$$

sendo que a integral não depende da trajetória e $\nabla \times \vec{F}_{k\ell} = 0$, onde

$$\nabla \times \vec{F}_{kl} = 0 = \hat{\imath}\left(\frac{\partial}{\partial y_{kl}}F^z_{kl} - \frac{\partial}{\partial z_{kl}}F^y_{kl}\right) + \hat{\jmath}\left(\frac{\partial F^x_{kl}}{\partial z_{kl}} - \frac{\partial}{\partial x_{kl}}F^z_{kl}\right) + \hat{k}\left(\frac{\partial F^y_{kl}}{\partial x_{kl}} - \frac{\partial F^x_{kl}}{\partial y_{kl}}\right)$$

Dada a mudança de variável:

$$\frac{\partial}{\partial \vec{r}_{kl}} = \frac{\partial}{\partial \vec{r}_k} = -\frac{\partial}{\partial \vec{r}_l}$$

$$\vec{F}_{kl} = -\left(\hat{\imath}\frac{\partial V_{kl}}{\partial x_{kl}} + \hat{\jmath}\frac{\partial V_{kl}}{\partial y_{kl}} + \hat{k}\frac{\partial V}{\partial z_{kl}}\right) = -\left(\hat{\imath}\frac{\partial V_{kl}}{\partial x_k} + \hat{\jmath}\frac{\partial V_{kl}}{\partial y_k} + \hat{k}\frac{\partial V_{kl}}{\partial z_k}\right)$$

$$= \hat{\imath}\frac{\partial V_{kl}}{\partial x_l} + \hat{\jmath}\frac{\partial V_{kl}}{\partial y_l} + \hat{k}\frac{\partial V_{kl}}{\partial z_l}$$

e se a 3ª lei de Newton é válida na forma fraca

$$= -\vec{F}_{lk}$$

de onde obtemos

$$\vec{F}_{lk} = -\left(\hat{\imath}\frac{\partial V_{kl}}{\partial x_l} + \hat{\jmath}\frac{\partial V_{kl}}{\partial y_l} + \hat{k}\frac{\partial V_{kl}}{\partial z_l}\right)$$

$V_{kl} = V_{kl}(\vec{r}_k - \vec{r}_l)$ serve de função potencial para o par de forças $\vec{F}_{kl}$ e $\vec{F}_{lk}$

Podemos agora definir a energia potencial total devida às forças internas como soma de potenciais de pares

$$V^{int}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_N) = \sum_{k=1}^{N} \sum_{l<k} V_{kl}(\vec{r}_k - \vec{r}_l)$$

$$= V_{21}(\vec{r}_{21}) + V_{32}(\vec{r}_{32}) + V_{31}(\vec{r}_{31}) + \cdots \quad V_{N,N-1}(\vec{r}_{N,N-1})$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{\substack{k,l=1 \\ k \neq l}}^{N} V_{kl}(\vec{r}_k - \vec{r}_l)$$

$$= \frac{1}{2}\left[(V_{12} + V_{13} + \cdots + V_{1N}) + (V_{21} + V_{23} + \cdots V_{2N}) \cdots \right]$$

sendo a força total interna sobre a k-ésima partícula igual à

$$\vec{F}_k^{int} = -\left(\hat{\imath} \frac{\partial V^{int}}{\partial x_k} + \hat{\jmath} \frac{\partial V^{int}}{\partial y_k} + \hat{k} \frac{\partial V^{int}}{\partial z_k} \right) \quad , k = 1, 2, \ldots, N.$$

__Exemplo__. Campo eletrostático devido à um sistema de partículas carregadas:

$$V^{int}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_N) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N} \sum_{k \neq j} \frac{q_j q_k}{|\vec{r}_j - \vec{r}_k|}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N} \sum_{k \neq j} \frac{q_j q_k}{r_{jk}}$$

Se $N=3$ obtemos

$$V^{int} = \frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}}$$

As respectivas forças eletrostáticas são

$$\vec{F}_1^{int} = -\frac{\partial V^{int}}{\partial \vec{r}_1} = -\nabla_1 V^{int}$$

Calculemos:

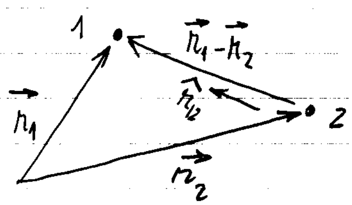
$$\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{1}{r_{kl}}\right) = -\frac{1}{r_{kl}^2}\, 2(x_k - x_l) \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_{kl}}\right) = -\frac{(x_k - x_l)}{r_{kl}^3}$$

porque $\quad r_{kl} = \sqrt{(x_k - x_l)^2 + (y_k - y_l)^2 + (z_k - z_l)^2}$,

daí

$$\vec{F}_1^{\,int} = + q_1 q_2 \frac{(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{r_{12}^3} + q_1 q_3 \frac{(\vec{r}_1 - \vec{r}_3)}{r_{13}^3}$$

$$= \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2}\,\hat{r}_{12} + \frac{q_1 q_3}{r_{13}^2}\,\hat{r}_{13}$$



De maneira análoga obtemos as forças sobre as outras partículas.

§ O Problema de dois corpos

Consideramos o problema de duas partículas de massa m_1 e m_2. As eq. do movimento são

$$m_1\vec{a}_1 = m_1\ddot{\vec{r}}_1 = \vec{F}_1^{ext} + \vec{F}_1^{int}$$
$$m_2\vec{a}_2 = m_2\ddot{\vec{r}}_2 = \vec{F}_2^{ext} + \vec{F}_2^{int}$$

Este sistema tem 6 graus de liberdade: 3 por cada partícula. Se a 3ª lei de Newton for válida temos

$$\vec{F}_1^{int} = \vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} = -\vec{F}_2^{int}$$

daí

$$\vec{F}^{int} = \vec{F}_1^{int} + \vec{F}_2^{int} = 0$$

Centro de massa:

$$\vec{R} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1+m_2} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{M}.$$

$$\vec{V} = \dot{\vec{R}} = \frac{m_1\dot{\vec{r}}_1 + m_2\dot{\vec{r}}_2}{m_1+m_2} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{M}$$

Eq. de movimento para o centro de massa:

$$M\ddot{\vec{R}} = m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2 = \vec{F}_1^{ext} + \vec{F}_2^{ext} = \vec{F}$$

$$\boxed{M\ddot{\vec{R}} = \vec{F}(\vec{r}_1, \vec{r}_2)}$$

Em geral a eq. acima depende das 6 coordenadas $(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$ e não esta desacoplada para a coordenada do CM

$$M\ddot{\vec{R}} = \vec{F}^{ext}(x_1 y_1 z_1, x_2 y_2 z_2; t)$$

Um caso interessante é quando essa força depende só de $(\vec{R}, \dot{\vec{R}}, t)$. Neste caso resulta desacoplada e podemos pensar no centro de massa como numa partícula fictícia com massa $M = m_1 + m_2$

<u>Exemplos deste tipo de forças externas</u>:

1. Força uniforme que não depende das coordenadas da partícula, como a força de gravidade na superfície da terra

$$\vec{F}^{ext} = m_1 g + m_2 g = Mg$$

2. Força de atrito proporcional à velocidade com constantes de amortecimento iguais para as partículas

$$\vec{F}^{ext} = -\gamma_1 \vec{v}_1 - \gamma_2 \vec{v}_2 = -m_1 \lambda \vec{v}_1 - m_2 \lambda \vec{v}_2$$
$$= -\lambda (m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2) = -\lambda M\vec{V} = -\lambda M\dot{\vec{R}}$$

Quando a condição acima é satisfeita os outros 3 graus de liberdade dão conta do movimento "interno" do sistema em relação ao centro de massa:

Para descrever tal movimento definimos coordenadas relativas

$$\vec{\rho} \equiv \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

Vejamos que as posições relativas ao CM podem-se expressar em termos de $\vec{\rho}$:

$$\vec{r}_1{}' \equiv \vec{r}_1 - \vec{R} = \frac{M\vec{r}_1 - (m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2)}{M} = -\frac{m_2}{M}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = -\frac{m_2}{M}\vec{\rho},$$

$$\vec{r}_2{}' \equiv \vec{r}_2 - \vec{R} = \frac{M\vec{r}_2 - (m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2)}{M} = \frac{m_1\vec{\rho}}{M}.$$

Daí que velocidades e acelerações relativas ao CM ficam

$$\begin{cases} \vec{v}_1{}' = \vec{v}_1 - \vec{V} = -\dfrac{m_2}{M}\dot{\vec{\rho}}, \\ \vec{v}_2{}' = \vec{v}_2 - \vec{V} = \dfrac{m_1}{M}\dot{\vec{\rho}}, \end{cases} \quad \begin{cases} \vec{a}_1{}' = \vec{a}_1 - \ddot{\vec{R}} = -\dfrac{m_2}{M}\ddot{\vec{\rho}} \\ \vec{a}_2{}' = \vec{a}_2 - \ddot{\vec{R}} = \dfrac{m_1}{M}\ddot{\vec{\rho}} \end{cases}$$

Daí o problema está resolvido se temos a solução para $\vec{\rho} = \vec{\rho}(t)$.

Vejamos a eq. de mov. para a coordenada relativa

$$\ddot{\vec{\rho}} = \ddot{\vec{r}}_2 - \ddot{\vec{r}}_1 = \frac{1}{m_2}\left[\vec{F}_2^{ex} + \vec{F}_{21}\right] - \frac{1}{m_1}\left[\vec{F}_1^{ex} + \vec{F}_{12}\right]$$

$$(\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21})$$

$$= \frac{1}{m_1 m_2}\left(m_1\vec{F}_2^{ex} - m_2\vec{F}_1^{ex}\right) + \frac{1}{m_1 m_2}(m_1+m_2)\vec{F}_{21}$$

$$= \frac{m_1+m_2}{m_1 m_2}\left[\frac{m_1\vec{F}_2^{ex} - m_2\vec{F}_1^{ex}}{m_1+m_2} + \vec{F}_{21}\right]$$

Def Massa Reduzida

$$\mu \equiv \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2} \iff \frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$$

A eq. de mov. fica

$$\mu \ddot{\vec{\rho}} = \vec{F}^{int}(\vec{\rho}) + \frac{m_1 \vec{F}_2^{ex} - m_2 \vec{F}_1^{ex}}{M} \equiv \vec{f}$$

Notemos que na maioria dos casos considerados o termo $(m_1 \vec{F}_2^{ex} - m_2 \vec{F}_1^{ex})$ depende apenas da coordenada e velocidade relativa. Por exemplo:

a) $$m_1 \vec{F}_2^{ex} - m_2 \vec{F}_1^{ex} = m_1 (m_2 \vec{g}) - m_2 (m_1 \vec{g}) = m_1 m_2 (\vec{g} - \vec{g}) = 0$$

b)
$$m_1 \vec{F}_2^{ex} - m_2 \vec{F}_1^{ex} = m_1 (-m_2 \lambda \vec{v}_2) - m_2 (-m_1 \lambda \vec{v}_1)$$
$$= -m_1 m_2 \lambda (\vec{v}_2 - \vec{v}_1) = -m_1 m_2 \lambda \dot{\vec{\rho}}$$

Sendo que $\vec{F}^{int} = \vec{F}^{int}(\vec{\rho})$, temos que a "força total" que aparece na eq. para $\vec{\rho}$ depende apenas de $(\vec{\rho}, \dot{\vec{\rho}})$.

Dai:

$$\boxed{\mu \ddot{\vec{\rho}} = \vec{f}(\vec{\rho}, \dot{\vec{\rho}}, t) = \vec{F}^{int}(\vec{\rho}) + \frac{m_1 \vec{F}_2^{ex} - m_2 \vec{F}_1^{ex}}{m_1 + m_2}}$$

graus de liberdade relativos ao CM

$$\boxed{M \ddot{\vec{R}} = \vec{F}^{ex}(\vec{R}, \dot{\vec{R}}, t)}$$

graus de liberdade associados ao CM

▸ <u>Exemplo importante</u>

Ausência de forças externas. Força interna central

$$\vec{F}^{int}(\vec{\rho}) = F(\rho)\, \hat{\rho}$$

Temos

$$M\ddot{\vec{R}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{V} = cte$$

e a equação para o movimento relativo ao centro de massa é

$$\boxed{\mu\ddot{\vec{\rho}} = F(\rho)\,\hat{\rho}}$$

No caso do movimento planetário, tratado como problemas de dois corpos, devemos substituir m, a massa do planeta, pela massa reduzida μ. Vejamos o caso da Terra

$$M_T = 5.98 \times 10^{27}\,[gr] \qquad M_S = 1.99 \times 10^{33}\,[gr]$$

$$\mu_T = \frac{M_T\,M_S}{M_T + M_S} = M_T\left[\frac{1}{1+(M_T/M_S)}\right]$$

$$= M_T \times (0.99999699) \approx M_T$$

Porém desviações da 3ª lei de Kepler podem ser observadas (devido ao efeito da massa reduzida).

A 3ª lei de Kepler podia ser escrita como

$$T^2 = \frac{4\pi^2 m\, a^3}{|K|}$$

onde $|K|$ é a constante de Kepler $|K| = G m M_S$

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM_S}\,a^3$$, que independe da massa dos planeta,

mas tratando-se de movimento relativo devemos sustituir m por μ.

Dai

$$T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{G} \times \frac{\mu}{m M_S} = \frac{4\pi^2 a^3}{G(M_S+m)}$$

Aparece uma pequena dependência na massa do planeta na constante da Lei de Kepler

Energia cinética e conservação da energia

O trabalho feito pelas forças externas sobre o centro de massa é dado por

$$W_{1\to 2} = \int_{\vec{R}_1}^{\vec{R}_2} \vec{F}^{ext} \cdot d\vec{R}$$

$$= \int_{\vec{R}_1}^{\vec{R}_2} (M\ddot{\vec{R}}) \cdot d\vec{R} = \int_{t_1}^{t_2} M\left(\frac{d}{dt}\dot{\vec{R}} \cdot \frac{d\vec{R}}{dt}\right) dt$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} dt\, M \left(\dot{\vec{R}} \cdot \frac{d\dot{\vec{R}}}{dt}\right)$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} dt\, \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}M\dot{\vec{R}}^2\right) = \Delta T_{CM}$$

$$= \underset{(1\to 2)}{\Delta}\left(\frac{1}{2}MV^2\right).$$

Da mesma maneira pode-se definir o trabalho feito sobre a massa reduzida

$$w_{1\to 2} \equiv \int_{\vec{\rho}_1}^{\vec{\rho}_2} \vec{f}(\vec{\rho},\dot{\vec{\rho}},t)\cdot d\vec{\rho}$$

$$= \int_{\vec{\rho}_1}^{\vec{\rho}_2} \left[\vec{F}^{int}(\vec{\rho}) + \frac{m_1\vec{F}_1^{ex} - m_2\vec{F}_2^{ex}}{m_1+m_2} \right]\cdot d\vec{\rho}$$

$$= \int_{\vec{\rho}_1}^{\vec{\rho}_2} d\vec{\rho}\cdot \mu\ddot{\vec{\rho}} = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\mu\dot{\vec{\rho}}^{\,2}\right)dt = \Delta T_R$$

$$= \Delta_{(1\to 2)}\left(\frac{1}{2}\mu\vec{v}^{\,2}\right) \qquad \text{com } \vec{v} \equiv \dot{\vec{\rho}}\,.$$

▶ __Def__. Falamos que

$$T_{CM} \equiv \frac{1}{2}M\vec{V}^2$$

é a energia cinética associado ao Centro de Massa, e

$$T_R = \frac{1}{2}\mu\vec{v}^{\,2}$$

é a energia cinética da partícula reduzida, isto é a energia cinética associada ao centro de massa.

__Teorema 1.__ A energia cinética total do sistema pode ser escrita como

$$\boxed{T = T_{CM} + T_R = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}\mu\vec{v}^{\,2}}$$

__Dem__ A energia cinética total é simplesmente

$$T = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2\,.$$

Introduzimos agora as velocidades relativas ao centro de massa

$$\vec{v}_1{}' = \vec{v}_1 - \vec{V} = -\frac{m_2}{M}\dot{\vec{\rho}} = -\frac{m_2}{M}\vec{v}$$

$$\vec{v}_2{}' = \vec{v}_2 - \vec{V} = \frac{m_1}{M}\dot{\vec{\rho}} = \frac{m_1}{M}\vec{v}$$

Daí
$$\begin{cases} \vec{v}_1 = \vec{V} - \dfrac{m_2}{M}\vec{v}, \\ \vec{v}_2 = \vec{V} + \dfrac{m_1}{M}\vec{v}. \end{cases}$$

$$T = \frac{1}{2}m_1\left[V^2 - \frac{2m_2}{M}(\vec{V}\cdot\vec{v}) + \frac{m_2^2}{M^2}\vec{v}^2\right] + \frac{1}{2}m_2\left[V^2 + \frac{2m_1}{M}(\vec{V}\cdot\vec{v}) + \frac{m_1^2}{M^2}\vec{v}^2\right]$$

$$= \frac{1}{2}(m_1+m_2)\vec{V}^2 - \cancel{\frac{m_1m_2}{M}(\vec{V}\cdot\vec{v})} + \cancel{\frac{m_1m_2}{M}(\vec{V}\cdot\vec{v})} +$$

$$+ \frac{1}{2}\frac{m_1m_2^2 + m_2m_1^2}{M^2}\vec{v}^2$$

$$= \frac{1}{2}M\vec{V}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{m_1m_2}{M}\right)\vec{v}^2$$

ou

$$\boxed{T = \frac{1}{2}M\vec{V}^2 + \frac{1}{2}\mu\vec{v}^2}$$

Teorema 2. $T_R = \frac{1}{2}\mu\vec{v}^2$ é justamente a energia cinética do sistema relativo ao centro de massa

$$T' = \frac{1}{2}m_1\vec{v}_1{}'^2 + \frac{1}{2}m_2\vec{v}_2{}'^2$$

$$= \frac{1}{2}m_1\left(-\frac{m_2}{M}\vec{v}\right)^2 + \frac{1}{2}m_2\left(\frac{m_1}{M}\vec{v}\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{m_1m_2}{M}\vec{v}^2 = \frac{1}{2}\mu\vec{v}^2$$

c.q.d.

§ Sistema relativo ao Centro de Massa (CM) (Symon §4.9)

Aquelo que foi feito para duas partículas pode ser generalizado para N (o problema de N corpos). Este problema tem 3N graus de liberdade e sempre pode-se separar o movimento do CM, o qual reduz o problema em 3 graus de liberdade (para ausência de forças externas ou para forças que satisfazem algumas condições gerais).

Agora devemos descrever os graus de liberdade internos do sistema de partículas. Seja $\vec{R}$ a coordenada do CM

$$M\vec{R} = \sum_{k=1}^{N} m_k \vec{r}_k \, , \qquad M = \sum_{k=1}^{N} m_k$$

Chamamos de $\vec{r}_k^{\,i}$ as coordenadas relativas ao CM $(k = 1, 2, .., N)$.

$$\vec{r}_k^{\,i} \equiv \vec{r}_k - \vec{R} \quad \text{ou}$$

$$\vec{r}_k = \vec{R} + \vec{r}_k^{\,i} \, , \quad k = 1, 2, \ldots, N$$

A seguinte propriedade é válida

$$\sum_{k=1}^{N} m_k \vec{r}_k^{\,i} = \sum_{k=1}^{N} m_k \vec{r}_k - M\vec{R} = M\vec{R} - M\vec{R} = 0$$

O centro de massa é um ponto de "simetria interna". Da mesma maneira definimos as velocidades relativas ao CM

$$\vec{v}_k^{\,i} = \dot{\vec{r}}_k^{\,i} \equiv \dot{\vec{r}}_k - \dot{\vec{R}} = \vec{v}_k - \vec{V} .$$

O momentum interno total do sistema é nulo. Em efeito

$$\sum_{k=1}^{N} m_k \vec{v}_k^{\,i} = \sum_{k=1}^{N} m_k \vec{v}_k - M\vec{V} = \vec{P} - \vec{P} = 0$$

<u>Teorema da energia cinética</u>.

A energia cinética total do sistema de partículas pode ser separada em dois termos. Um deles é a energia cinética associada ao CM e o outro é a energia cinética relativa ao CM.

$$T = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} m_k \vec{v}_k^{\,2} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} m_k \left(\vec{V} + \vec{v}_k^{\,i}\right)^2$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} m_k \left(V^2 + 2\vec{V}\cdot\vec{v}_k^{\,i} + \vec{v}_k^{\,i\,2}\right)$$

$$= \frac{1}{2} M\vec{V}^2 + \vec{V}\cdot\underbrace{\sum_{k=1}^{N} m_k \vec{v}_k^{\,i}}_{0} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} m_k (\vec{v}_k^{\,i})^2$$

$$\boxed{T = \frac{1}{2} M\vec{V}^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} m_k (\vec{v}_k^{\,i})^2}$$

<u>Teorema de momentum linear e angular</u>

$$\vec{P} = \sum_{k=1}^{N} m_k \vec{v}_k = \sum_{k=1}^{N} m_k \left(\vec{V} + \vec{v}_k^{\,i}\right) = \underbrace{\sum_{k=1}^{N} m_k \vec{v}_k^{\,i}}_{0} + M\vec{V}$$

$$\boxed{\vec{P} = M\vec{V} + \vec{0}}$$

$$\vec{L} = \sum_{k=1}^{N} m_k (\vec{r}_k \times \vec{v}_k) = \sum_{k=1}^{N} m_k \left[(\vec{R} + \vec{r}_k^{\,i}) \times (\vec{V} + \vec{v}_k^{\,i}) \right]$$

$$= M(\vec{R} \times \vec{V}) + \vec{R} \times \overbrace{\sum_{k=1}^{N} m_k \vec{v}_k^{\,i}}^{0} + \Big(\overbrace{\sum_{k=1}^{N} m_k \vec{r}_k^{\,i}}^{0} \Big) \times \vec{V} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{N} m_k (\vec{r}_k^{\,i} \times \vec{v}_k^{\,i})$$

$$\boxed{\vec{L} = M(\vec{R} \times \vec{V}) + \sum_{k=1}^{N} m_k (\vec{r}_k^{\,i} \times \vec{v}_k^{\,i})}$$

O torque também pode ser decomposto em relação ao centro de massa

$$\vec{N} = \sum_{k=1}^{N} \vec{r}_k \times \vec{F}_k^{ex}$$

$$= \sum_{k=1}^{N} (\vec{R} + \vec{r}_k^{\,i}) \times \vec{F}_k^{ex}$$

$$= \vec{R} \times \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k^{ex} + \sum_{k=1}^{N} (\vec{r}_k^{\,i} \times \vec{F}_k^{ex})$$

Chamamos

$$\sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k^{ex} = \vec{F} \quad , \qquad \vec{N}_R \equiv \sum_{k=1}^{N} (\vec{r}_k^{\,i} \times \vec{F}_k^{ex})$$

ou

$$\boxed{\vec{N} = \vec{R} \times \vec{F} + \vec{N}_R}$$

§ Exemplos

1. Problema do foguete

$-\vec{V_0}$: velocidade de expulsão dos gases, relativo ao foguete.

M_v : massa do foguete vazio

M_c : massa do combustível

$\dfrac{dM(t)}{dt} = -\alpha < 0$: taxa de variação da massa (cte)

Se $t=0$ é o instante em que o motor foi ligado temos

$$M(t) - M(0) = -\int_0^t \alpha \, dt = -\alpha t$$

$$M(0) = M_v + M_c$$

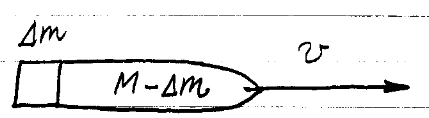
$$M(t) = M_v + M_c - \alpha t$$

escrever $\alpha \equiv \dfrac{M_c}{\tau}$ $\quad$ τ : tempo em que o combustível é esgotado

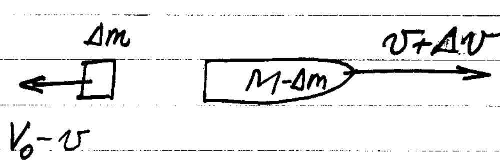
$$\boxed{M(t) = \begin{cases} M_v + M_c\left(1 - \dfrac{t}{\tau}\right) & \text{para } 0 \leq t \leq \tau \\ M_v & \text{para } t \geq \tau \end{cases}}$$

Este problema pode ser resolvido pensando na conservação do momentum linear para um sistema. Pensemos em dois intantes de tempo separados infinitesimalmente

tempo t



tempo $t+\Delta t$



O momentum linear é conservado

$$\underset{(t)}{Mv} = \underset{(t+\Delta t)}{(M-\Delta m)(v+\Delta v) - \Delta m\,(V_0 - v)}$$

em primeira ordem nos infinitesimais

$$Mv = Mv + M\Delta v - \cancel{v\Delta m} - V_0\Delta m + \cancel{v\Delta m}$$

$$M\Delta v = V_0\,\Delta m = -V_0\,\Delta M$$

porque $\Delta m = -\Delta M$. Tomando limites $\Delta \to 0$ obtemos

$$\dot{v} = -\frac{V_0}{M}\dot{M} \qquad \text{ou} \qquad dv = -\frac{V_0}{M}\,dM$$

Esta equação pode ser integrada para a velocidade

$$\int_{v_i}^{v_f} dv = -V_0 \int_{M_i}^{M_f} \frac{dM}{M} = -V_0 \ln\left(\frac{M_f}{M_i}\right)$$

$$v_f - v_i = -V_0 \ln\left(\frac{M_f}{M_i}\right) = V_0 \ln\left(\frac{M_i}{M_f}\right)$$

O tempo inicial é o tempo $t=0$ quando o motor foi ligado. Seja $v(0)$ a velocidade inicial:

$$\boxed{v(t) = v_0 + V_0 \ln\left[\frac{M_v + M_c}{M(t)}\right]}$$

Onde $M(t)$ é dado por

$$M(t) = \begin{cases} M_v + M_c\,(1 - t/\tau) & \text{para } 0 \leq t \leq \tau \\ M_v & \text{para } t > \tau \end{cases}$$

Dai que a velocidade máxima que pode atingir o foguete é dada por

$$v_{max} = v(\tau) = v(0) + V_0 \ln\left(\frac{M_v + M_c}{M_v}\right)$$

Se $v(0) = 0$

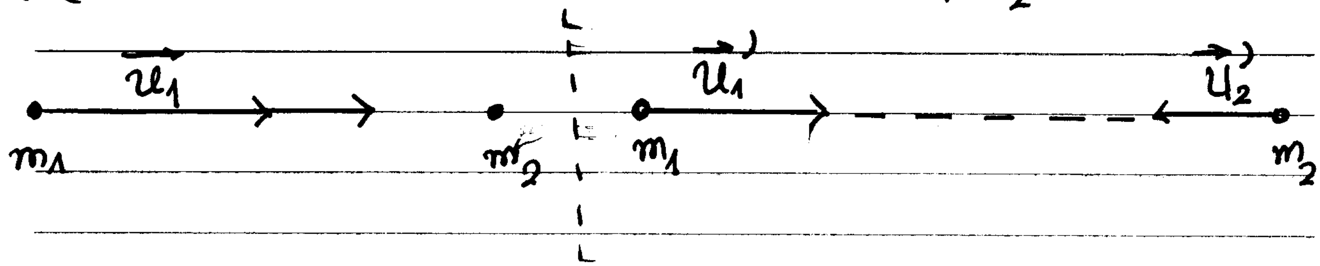
$$\boxed{v_{max} = V_0 \ln\left(1 + \frac{M_c}{M_v}\right)}$$

Que acontece se o foguete encontra-se num campo externo? (por exemplo o campo gravitacional)

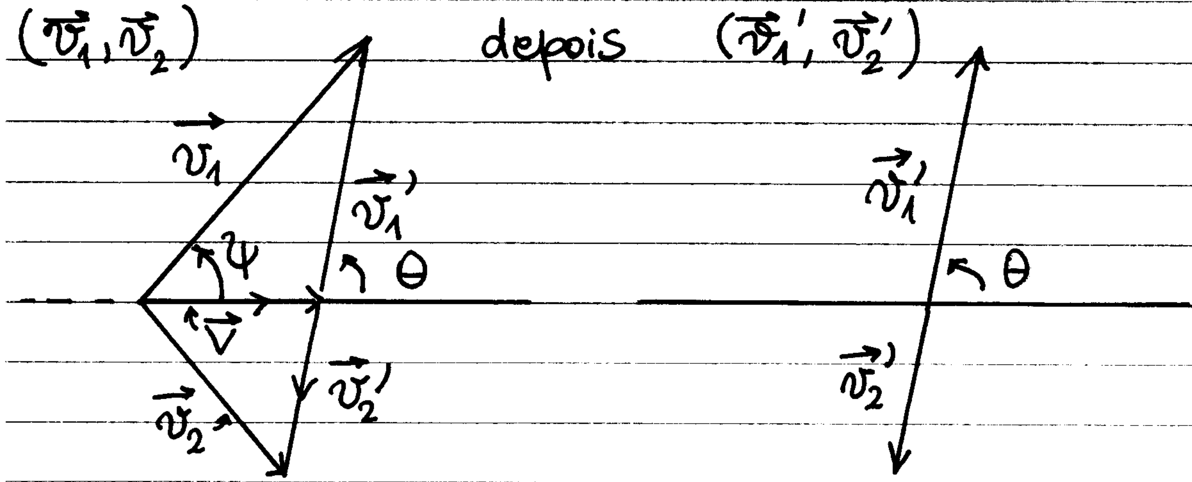
Colisões de partículas no SR ligado ao CM

SRL SRCM

$(\vec{u}_1, 0)$ antes $(\vec{u}_1', \vec{u}_2')$



$(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ depois $(\vec{v}_1', \vec{v}_2')$



ψ : ângulo de espalhamento no SRL
θ : ângulo de espalhamento no SRCM

Da figura, vemos que:

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_1' + \vec{V} \,,$$
$$\vec{v}_2 = \vec{v}_2' + \vec{V} \,,$$

onde $\vec{V}$ é a velocidade do CM no SRL:

$$\vec{V} = \frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{u}_1$$

Da figura, obtemos as relações para $\vec{v}_1$ seguintes:

$$\begin{cases} v_1 \cos\psi = V + v_1' \cos\theta \\ v_1 \,\text{sen}\,\psi = v_1' \,\text{sen}\,\theta \end{cases}$$

Dividindo a segunda pela primeira:

$$\tan\psi = \frac{\text{sen}\,\psi}{\cos\psi} = \frac{v_1' \,\text{sen}\,\theta}{V + v_1'\cos\theta} = \frac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta + V/v_1'}$$

Precisamos calcular a razão $\dfrac{V}{v_1'}$.

Sabemos que para o SRCM, temos que:

$$v_1' = u_1'$$

$$\vec{u}_1' = \vec{u}_1 - \vec{V} = \vec{u}_1 - \frac{m_1 \vec{u}_1}{m_1+m_2}$$

$$= \frac{m_2}{m_1+m_2}\vec{u}_1$$

$$= \frac{m_2}{\cancel{m_1+m_2}} \cdot \frac{\cancel{m_1+m_2}}{m_1} \vec{V}$$

Obtendo:

$$v_1' = u_1' = \frac{m_2}{m_1} V$$

e $\boxed{\dfrac{V}{v_1'} = \dfrac{m_1}{m_2}}$ Os ângulos de espalhamento estão ligados por:

$$\boxed{\tan \psi = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta + \frac{m_1}{m_2}}}$$

Se for $m_1 \ll m_2$, temos $\tan\psi \approx \tan\theta$, com $\psi = \theta$.

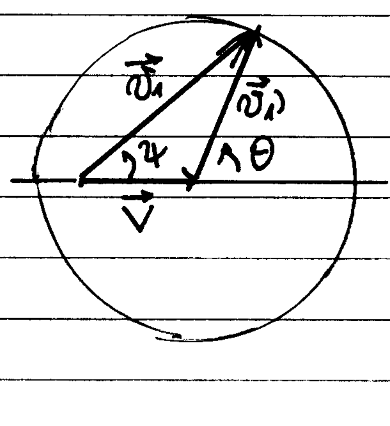
Se $m_1 = m_2$, escrever $\cos\theta + 1 = 2\cos^2\theta/2$

$$\tan\psi = \frac{2\operatorname{sen}\theta/2\cos\theta/2}{2\cos^2\theta/2} = \frac{\operatorname{sen}\theta/2}{\cos\theta/2} = \tan\theta/2$$

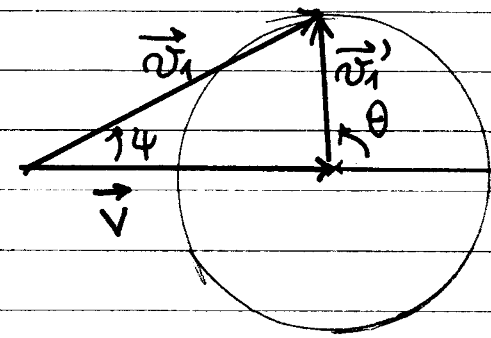
$\Rightarrow \psi = \frac{\theta}{2}$. Como θ é arbitrário $0 \leq \theta \leq \pi$, o máximo ângulo ψ_{max} é $\pi/2$.

Dependendo da relação entre as massas, temos diferentes escenários:

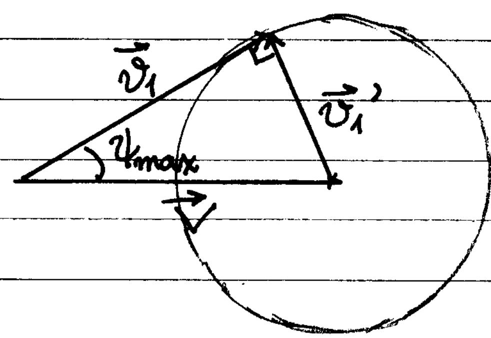
i) $m_1 < m_2 \Rightarrow V < v_1'$. Neste caso, ψ pode tomar qualquer valor entre $0 \leq \psi \leq \pi$



ii) $m_1 > m_2$, $V > v_1'$. Neste caso ψ está limitado



Claramente, o ângulo ψ é máximo quando o vetor $\vec{v}_1$ é tangente ao círculo:



Temos que

$$\operatorname{sen} \psi_{max} = \frac{v_1'}{V} = \frac{m_2}{m_1} < 1$$

ou $$\tan \psi_{max} = \frac{m_2/m_1}{\sqrt{1-(m_2/m_1)^2}}$$